Zagadnienia powiązane

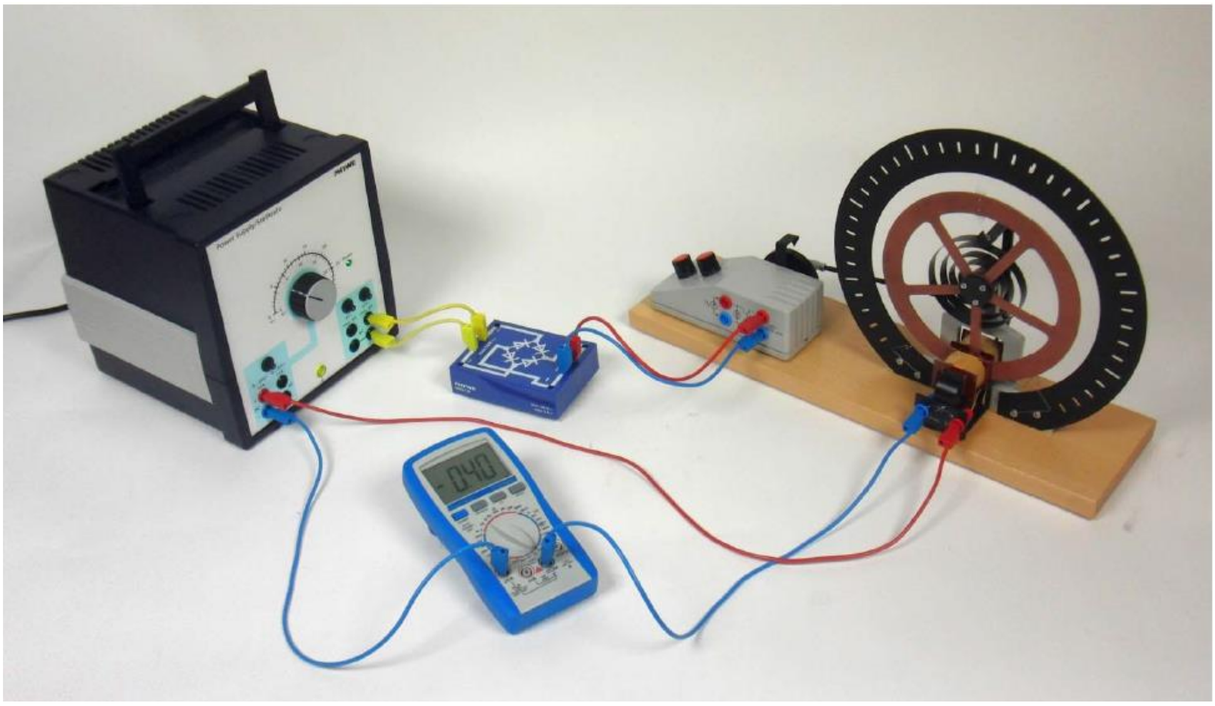
Częstość kołowa, częstotliwość charakterystyczna, częstotliwość rezonansowa, wahadło skrętne, drgania skrętne, moment siły, moment powrotny, drgania tłumione/nietłumione, drgania wymuszone, stosunek tłumienie/dekrement, stała tłumienia, logarytmiczny dekrement tłumienia, przypadek aperiodyczny, pełzanie.

Podstawy

Dla układu wykonującego drgania swobodne zaobserwowano, że kolejne zmniejszenie maksymalnej amplitudy silnie zależy od tłumienia. Jeśli drgania układu są stymulowane okresowo przez zewnętrzny moment siły, obserwujemy, że w stanie stacjonarnym amplituda jest funkcją jego częstotliwości i amplitudy oraz tłumienia. Wyznaczymy częstotliwości charakterystyczne drgań swobodnych oraz krzywe rezonansu wymuszonego dla różnych wartości tłumienia.

Wyposażenie

1 Wahadło skrętne Pohla	11214.00
1 Transformator regulowany, 25 V AC / 20 V DC, 12 A	13531-93
1 Mostek prostowniczy, 30 V AC/1 A DC	06031.10
1 Stoper, cyfrowy, 1/100 sek.	03071.01
1 Multimetr cyfrowy	07134.00
2 Przewód, *l* = 250 mm, żółty	07360.02
2 Przewód, *l* = 750 mm, czerwony	07362.01
3 Przewód, *l* = 750 mm, niebieski	07362.04



Rys. 1: Przygotowanie doświadczenia

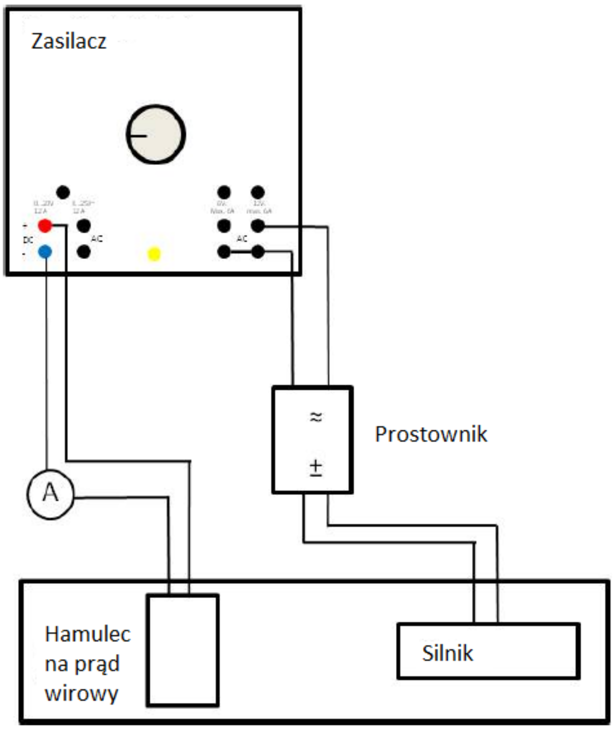
Zadania

A. Drgania swobodne

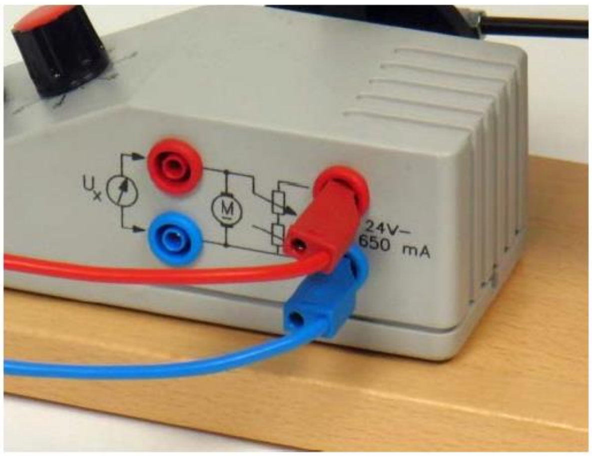
1. Ustal okres i częstotliwość charakterystyczną drgań nietłumionych.
2. Wyznacz okres i odpowiadającą mu częstotliwości charakterystyczne drgań o różnych wartościach tłumienia. Oblicz odpowiednie współczynniki, stałe i logarytmiczne dekrementy tłumienia.
3. Zbadaj przypadki aperiodyczne i pełzanie.

B. drgania wymuszone

1. Wyznacz krzywe rezonansowe i przedstaw je graficznie korzystając z wartości tłumienia *A*. Wyznacz odpowiednie częstotliwości rezonansowe i porównaj je z wartościami częstotliwości rezonansowej wyznaczonymi wcześniej.
2. Obserwuj przesunięcie fazowe pomiędzy ruchem wahadła skrętnego i zewnętrznym momentem wymuszającym, dla małego tłumienia i dla różnych wartości częstotliwości wymuszającej.



Rys. 2: Schemat połączeń elektrycznych.



Rys. 3. Podłączenie silnika prądu stałego do zasilacza

Przygotowanie doświadczenia

Eksperyment należy przygotować zgodnie z Rysunkami 1 i 2. Do wyjścia prądu stałego (DC) zasilacza podłączamy hamulec indukcyjny (prąd wirowy). Również silnik wymaga napięcia stałego, dlatego pomiędzy wyjściem AC zasilacza (12 V) i obu gniazdami silnika prądu stałego umieszczony jest prostownik (patrz Rysunek 3). Natężenie prądu stałego dostarczanego do prądów hamulca indukcyjnego I_B, jest regulowane za pomocą pokrętła regulacyjnego zasilacza i wskazywane przez amperomierz.

Wykonanie doświadczenia

A. Drgania swobodne

1. Ustal okres i częstotliwość charakterystyczną drgań nietłumionych.

Aby wyznaczyć częstotliwość charakterystyczną ω_0 wahadła skrętnego bez tłumienia ($I_B = 0$),

– odchyl wahadło całkowicie na bok
– zmierz czas kilku drgań.

Pomiar należy powtórzyć kilkukrotnie, potem należy wyznaczyć wartość średnią okresu $\overline{T}_0$.

1. Wyznacz okres i odpowiadającą mu częstotliwości charakterystyczne drgań o różnych wartościach tłumienia.

W ten sam sposób wyznacz częstotliwości charakterystyczne z tłumieniem drgań korzystając użyciu z następujących natężeń prądów wirowych dla hamulca:

$$I_B \sim 0{,}25\ A, (U_\sim = 4\ V)$$
$$I_B \sim 0{,}40\ A, (U_\sim = 6\ V)$$
$$I_B \sim 0{,}55\ A, (U_\sim = 8\ V)$$
$$I_B \sim 0{,}9\ A, (U_\sim = 12\ V)$$

Rys. 4: Wahadło ze wskazówką w położeniu zerowym

W celu wyznaczenia wartości tłumienia dla wyżej wymienionych przypadków zmierz jednokierunkowe maksymalne amplitudy w następujący sposób:

- odchyl wahadło całkowicie na bok
- obserwuj wielkość kolejnych amplitud po stronie drugiej.

Najpierw należy upewnić się, że wskazówka wahadła w spoczynku zbiega się z zerem na skali (patrz Rysunek 4). Regulacji można dokonać, obracając mimośrodową płytką silnika.

3. Zbadaj przypadki aperiodyczne i pełzanie.

Aby zbadać przypadek aperiodyczny (I_B ~ 2,0 A) i przypadek pełzania (I_0 ~ 2,3 A) natężenie prądu wirowego na krótko przekracza 2,0 A. Uwaga: Nie używaj natężenia prądu wirowego powyżej 2,0 A na więcej niż kilka minut.

B. drgania wymuszone

Aby stymulować ruch wahadła skrętnego, pręt łączący silnika przymocuj przy jednej trzeciej wysokości źródła. Częstotliwość wymuszania ω_a silnika można wyznaczyć za pomocą stopera, licząc ilość obrotów (na przykład mierząc czas 10 obrotów).

1. Wyznacz krzywe rezonansowe i przedstaw je graficznie korzystając z wartości tłumienia A.

Rys. 5: Pokrętła sterujące silnika. Górne pokrętło: „z grubsza”; dolne pokrętło: „na dokładnie”.

Pomiar zaczynamy od małych częstotliwości stymulujących ω_a. ω_a zwiększamy korzystając z „zgrubnego” potencjometru silnika. Po ustawieniu „z grubsza” maksymalnej wartości ω_a, zmieniaj wartość w małych krokach za pomocą potencjometru dokładnego (patrz Rysunek 5). W każdym przypadku, odczyty powinny być wykonywane wyłącznie po ustabilizowaniu amplitudy drgań wahadła. W przypadku braku tłumienia lub przy bardzo małych wartościach tłumienia, ω_a musi być wybrane w taki sposób, aby wahadło nie przekraczał zakresu na skali.

2. Obserwuj przesunięcie fazowe pomiędzy ruchem wahadła skrętnego i zewnętrznym momentem wymuszającym, dla małego tłumienia i dla różnych wartości częstotliwości wymuszającej.

Wybierz niewielką wartość tłumienia wahadła i stymuluj najpierw z częstotliwością ω_a znacznie poniżej częstotliwości rezonansowej, a potem znacznie powyżej niej. Obserwuj odpowiednie przesunięcia fazowe między ruchem wahadła skrętnego i zewnętrznym momentem wymuszającym. W każdym przypadku, odczyty powinny być wykonywane wyłącznie po ustabilizowaniu amplitudy drgań wahadła.

Teoria i analiza wyników

A. Nietłumione i tłumione drgania swobodne

Teoria

W przypadku swobodnych i tłumionych drgań skrętnych momenty M_1 (sprężyna spiralna) i M_2 (hamulec indukcyjny) działających na wahadło, mamy:

$$M_1 = -D^0\Phi \ i \ M_2 = -C\dot{\Phi}$$

Φ = kąt obrotu

$\dot{\Phi}$ = prędkość kątowa

D^0 = moment siły na jednostkę kąta

C = współczynnik proporcjonalności zależny od natężenia prądu, który zasila hamulec indukcyjny (na prądy wirowe)

Wypadkowy moment siły

$$M = -D^0\Phi - C\dot{\Phi}$$

prowadzi do uzyskania następującego równania ruchu:

$$I\ddot{\Phi} + C\dot{\Phi} + D^0\Phi = 0 \qquad (1)$$

I = moment bezwładności wahadła

$\ddot{\Phi}$ = przyspieszenie kątowe

Dzieląc równanie (1) przez I i wprowadzając oznaczenia:

$$\delta = \frac{C}{2I} \quad i \quad \omega_0^2 = \frac{D^0}{I}$$

uzyskamy

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + \omega_0^2\Phi = 0 \qquad (2)$$

δ nazywamy „stałą tłumienia”, a

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^0}{I}}$ częstotliwością charakterystyczną systemu nietłumionego.

Rozwiązaniem równania różniczkowego (2) jest funkcja:

$$\Phi(t) = \Phi_0 e^{-\delta t} \cos \omega t \qquad (3)$$

z

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad (4)$$

Analiza wyników

Zadanie A1:

Średnia wartość okresu $\bar{T}_0$ i odpowiadająca mu częstotliwość $\bar{\omega}_0$ swobodnych i nietłumionych drgań wahadła skrętnego jest następująca:

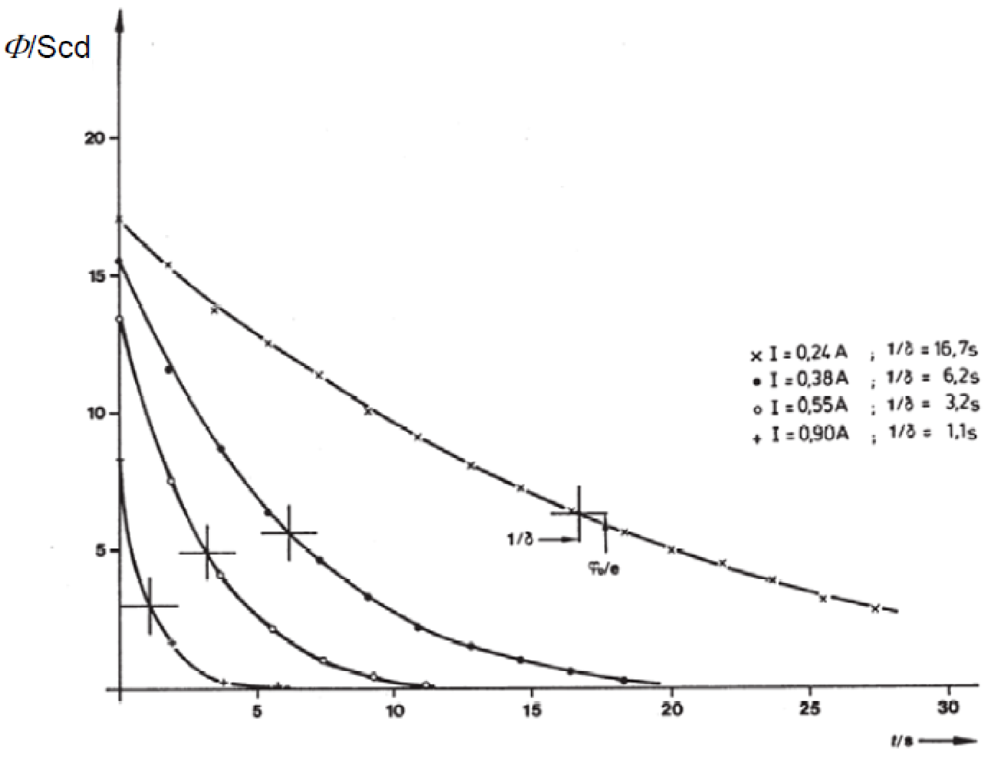
$$\bar{T}_0 = (1{,}817 \pm 0{,}017)sek; \quad \frac{\Delta \bar{T}_0}{\bar{T}_0} = \pm 1\%$$

i $\bar{\omega}_0 = (3{,}46 \pm 0{,}03)sek^{-1}$

Zadanie A2:

Sporządzić wykres zależności kolejnych jednokierunkowych maksimów amplitudy od czasu. Odpowiedni czas obliczamy korzystając z częstotliwości. Rysunek 6 przedstawia przykładowy wykres.

Odpowiednie współczynniki tłumienia, stałe tłumienia K i logarytmiczny dekrement tłumienia Λ, oblicza się w następujący sposób:



Rys. 6. Zależność wartości jednokierunkowych maksimów amplitudy od czasu dla różnych tłumień

Z równania (3) wynika, że amplituda $\Phi(t)$ drgań tłumionych zmniejszyła się e-razy względem wartości pierwotnej Φ_0 po upływie czasu $t = 1/\delta$. Ponadto z równania (3) wynika, że stosunek dwóch kolejnych amplitud jest stały:

$$\frac{\Phi_n}{\Phi_{n+1}} = K = e^{\delta T} \tag{5}$$

K jest nazywany „współczynnikiem tłumienia", T = okresem drgań, a wartość:

$$\Lambda = \ln K = \delta T = \ln \frac{\Phi_n}{\Phi_{n+1}} \tag{6}$$

to „logarytmiczny dekrement tłumienia.
Przykładowe wyniki dla charakterystycznych wartości tłumienia:

Tabela 1

I/A	$\frac{1}{\delta}/s$	δ/s^{-1}	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}/s$	$K = \frac{\Phi_n}{\Phi_{n+1}}$	Λ
0.25	16.7	0.06	3.46	1.1	0.12
0.4	6.2	0.16	3.45	1.4	0.31
0.55	3.2	0.31	3.44	1.9	0.64
0.9	1.1	0.91	3.34	5.6	1.72

Zadanie A3:
Równanie (4) posiada rzeczywiste rozwiązanie tylko gdy $\omega_0^2 \geq \delta^2$. Dla $\omega_0^2 = \delta^2$, wahadło powraca w jak najkrótszym czasie do swojego położenia wyjściowego - bez oscylacji (przypadek aperiodyczny). Dla $\omega_0^2 < \delta^2$ wahadło powraca asymptotycznie do położenia początkowego (pełzanie).

B. Drgania wymuszone

Teoria

Jeśli wahadło jest poddane okresowemu momentowi siły $M_a = M_0 \cos \omega_a t$, równanie (2) zmienia się następująco:

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + \omega_0^2 \Phi = F_0 \cos \omega_a t \tag{7}$$

gdzie $F_0 = \frac{M_0}{I}$

W stanie równowagi, rozwiązanie tego równania różniczkowego jest następujące:

$$\Phi(t) = \Phi_a \cos(\omega_a t - \alpha) \tag{8}$$

gdzie:

$$\Phi_a = \frac{\Phi_0}{\sqrt{\left\{1 - \left[\frac{\omega_a}{\omega_0}\right]^2\right\}^2 + \left[2\frac{\delta}{\omega_0}\frac{\omega_a}{\omega_0}\right]^2}} \tag{9}$$

i $\Phi_a = \frac{F_0}{\omega_0^2}$

Ponadto:

$$tg\ \alpha = \frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}$$

Odpowiednio:

$$\alpha = arc\ tan \frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \qquad (10)$$

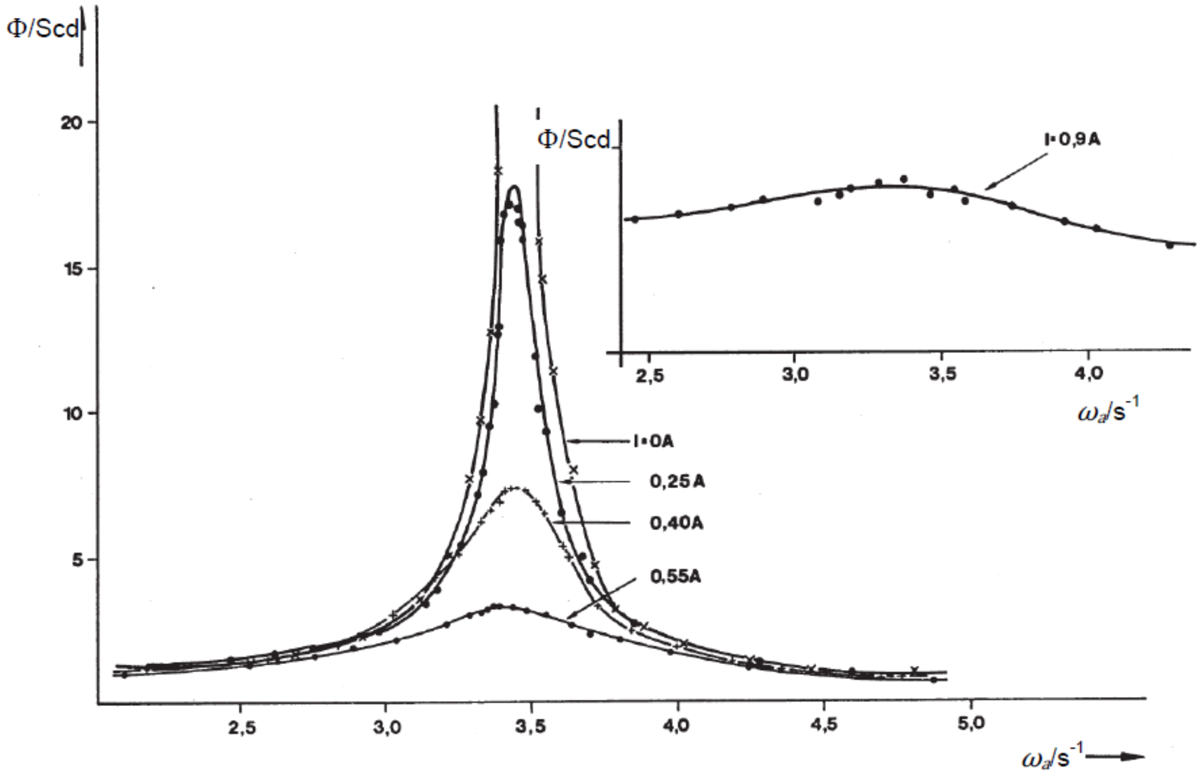
Analiza wyników

Zadanie B1:

Rysunek 7 przedstawia krzywe rezonansowe dla różnych tłumień.

Analiza równania (9) potwierdza wyniki uzyskane na Rysunku 7:

1. Większa F_0, większe Φ_a



Rys. 7: Krzywe rezonansowe dla różnych tłumień.

2. Dla ustalonej wartości F_0 mamy:

$$\Phi \longrightarrow \Phi_{max} \quad dla \quad \omega_a \cong \omega_0$$

3. Większe δ, mniejsze Φ_a
4. Dla $\delta = 0$ znajdziemy:

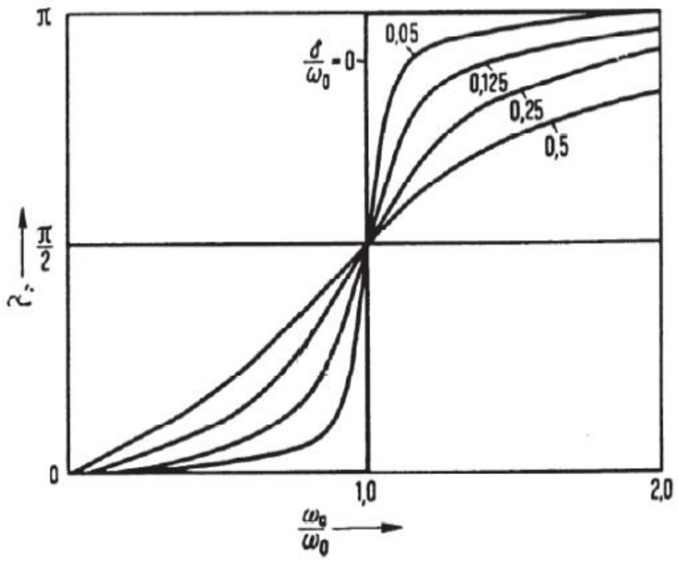
$$\Phi \longrightarrow \infty \quad jeśli \quad \omega_a = \omega_0$$

Z analizy krzywych na Rysunku 7 wynika, że dla tego przykładu średnia częstotliwość rezonansowa $\omega = 3{,}41 s^{-1}$ jest bardzo zbliżona do częstotliwości rezonansowej wyznaczonej w Zadaniu A1.

Zadanie B2:

Rysunek 8 przedstawia różnicę faz drgań wymuszonych w funkcji częstotliwości stymulującej zgodnie z Równaniem 10. W przypadku bardzo małych częstotliwości ω_a różnica faz jest w przybliżeniu zerowa, to znaczy wahadło i moment stymulacji są „w tej samej fazie”. Jeśli ω_a jest znacznie większa niż ω_0, wahadło i stymulacja są niemal „w fazach przeciwnych”.

Im mniejsze tłumienie, tym szybciej dochodzi do przejścia od drgań „w tej samej fazie” do drgań „w fazach przeciwnych”.



Rys. 8: Przesunięcie fazy dla drgań wymuszonych dla różnego tłumienia.